

Борьба сомнения с созерцанием: к ситуации в современной философии математики

ЕЛЕНА КОСИЛОВА

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (МГУ),
Россия, kosilova.ev@philos.msu.ru.

Ключевые слова: созерцание; интуиция; сомнение; философия математики; номинализм в философии математики; Платон; Иммануил Кант; Эдмунд Гуссерль.

В статье рассматриваются концепт созерцания (*θεωρία*, интуиция, *Anschauung*, *Wesensschau*) и метод сомнения в философии математики от Античности до наших дней. В классической философии математики сомнений в достижимости надежного математического знания не было. Сомнение всегда присутствовало, но не претендовало на деконструкцию созерцания. Предметами созерцания выступают или высший мир «идей» (Платон, неоплатоники), или врожденные идеи (Рене Декарт, Готфрид Лейбниц), или априорные формы (Иммануил Кант), или нечто загадочное, возможно, подсознание (Анри Пуанкаре). Последним классическим философом, требовавшим созерцания, был Эдмунд Гуссерль, а последним математиком — Курт Гёдель. Для современной математики характерен уход от интуиции, поэтому и философия математики принципиально изменилась: теперь созерцание подвергается сомнению.

В статье дан краткий обзор истории сомнения, от Платона до торжества сомнения во второй половине XIX — начале XX века. Ниспровержение созерцания происходит в работах

Ханса Хана, Людвиг Витгенштейна, Дэвида Блура и современных номиналистов (Хартри Филд). Часто на место созерцания ставится формальный вывод, логика, как это было у Пуанкаре и Дэвида Гильберта. Однако деконструкция созерцания имеет более глубокие последствия для философии математики, чем замена его на логику. Логика, в свою очередь, тоже нуждается в обосновании. Почему *modus ponens* и правило подстановки считаются надежными формальными операциями? Здесь в дело вступает логическая очевидность: Гуссерль показал, что она тоже является видом созерцания. Однако ничто не должно быть очевидно, в том числе и простейшие формальные операции должны рассматриваться как чисто конвенциональные. Какая философия математики ждет нас в будущем? В статье делается предположение, что математика будет рассматриваться как вид игры по произвольным правилам. Именно таков сейчас тренд ее развития. Однако в противоречие с этим трендом входит проблема приложений математики и вигнеровская загадка «непостижимой эффективности математики в естественных науках».

ФИЛОСОФИЯ математики существует столько же, сколько существует философия и греческая доказательная математика¹. Мы без колебаний ведем начало философии математики от Пифагора. На своем долгом пути эта философия сильно изменялась. Пифагор видел математику в окружающем мире и космосе. Платон — в мире вечных идей, мире подлинного существования. Готфрид Лейбниц склонялся к тому, что математика встроена в наш разум, относится к аналитическим истинам. Иммануил Кант также говорил о встроенности в нас математики, хотя уже о синтетических истинах. Все обычно согласны, что математика априорна, что она отличается от наук об опытных фактах своей необходимостью и всеобщностью. Однако и о ее укорененности в практике тоже много раз заходила речь, например, у Людвиг Витгенштейна, Дэвида Блур и современных фикционалистов. Ныне в философии математики все так же идут споры, более того, даже классический платонизм не сдал свои позиции, например, у Курта Гёделя, и даже пифагореизм имеется — у Макса Тегмарка и Роджера Пенроуза. Однако для современной философии характерен тренд к социальному конструктивизму, видным представителем которого является Блур, многое позаимствовавший у Витгенштейна. Я же в настоящей статье хочу рассмотреть историческую борьбу двух идей, непосредственно относящихся к философии математики: идеи созерцания и идеи сомнения. Впрочем, сомнение скорее следует считать не столько идеей, сколько методом. И этот метод берет своим объектом самые разные идеи, в которых находит нечто некритически принятое, нечто наивное и взятое из веры. В течение долгих веков сомнение подступалось к созерцанию, но уходило в основном ни с чем. И, кажется, в наше время мы являемся свидетелями исхода этой борьбы — созерцание повержено.

Но что такое сомнение и что такое созерцание? Как дать им определения?

1. *Bedürftig T., Murawski R. Philosophy of Mathematics. B.; Boston: De Gruyter, 2018.*

О том и о другом философия знала давно. Но были разные интерпретации того и другого, и общего определения, насколько можно судить, нельзя дать, не рассмотрев историю этих понятий. Разные философы подходили к ним по-разному, прежде чем у нас сейчас сложилось современное понимание² (которое в будущем наверняка будет изменяться дальше). Поэтому рассмотрим и историю созерцания, и историю сомнения, при этом все время применяя их к философии математики.

История созерцания

Для того, что будет у нас называться созерцанием, в истории философии существовали разные термины. Это могло быть умозрение, интуиция, интеллектуальная интуиция, *Anschauung* — последнее обычно и переводится на русский как «созерцание». Самое трудное — разобраться со словом «интуиция». Оно происходит от латинского *intueor* «смотреть», но в современном языке сильно изменило свое значение, теперь интуиция — это не смотрение, а нерациональная догадка. Но мы будем иметь в виду, что в основном на протяжении истории философии *intuitio* означало именно усматривание, то есть созерцание.

Первым рассматриваемым автором будет у нас Платон, теория которого о познании как припоминании хорошо известна. Что надо сделать, чтобы припомнить, как направить мысли? Здесь у него и появляется понятие умозрения (*θεωρία*). Он дает четкий, хотя и довольно сказочный, ответ на вопрос: смотреть надо на мир идей, и для этого мы оснащены способностью умозрения, глазами ума³. Он (вслед за Парменидом) решительно отделяет умозрение от смотрения телесными глазами. Наглядно-зрительное изображение тут ни при чем. Обычными глазами мы можем увидеть нарисованный треугольник, например, при доказательстве теоремы о сумме углов, но таких материальных треугольников бесконечное множество. Глазами ума мы видим «треугольник вообще», идею треугольника. И нам становится ясно, что теорема о сумме углов применима к любому треугольнику, то есть к треугольнику вообще. Потом это возьмет на вооружение Кант. Что же касается умозрения, то кратко и емко его теория отражена в известном античном рассказе о споре киника Диогена с Платоном:

2. *Parsons C. Mathematical Intuition // Proceedings of the Aristotelian Society. 1980. Vol. 80. № 1. P. 145–168.*
3. *Платон. Федр / Под ред. Ю. А. Шичалина. М.: Прогресс, 1989. С. 28.*

- Стол и чашу я вижу, а столность и чашность не вижу.
- Чтобы видеть стол и чашу, у тебя есть глаза, а чтобы видеть столность и чашность, у тебя нет ума⁴.

Признанные авторитеты во всем, что касается созерцания, — неоплатоники. Нам будет интересен прежде всего Прокл, так как он рассматривал математическое мышление. Здесь мы видим пример того, как разводятся созерцание и рассуждение. Созерцание — это деятельность ума (*νοῦς*), мы ее находим в философии и в мышлении о божественном. Ниже ума находится дианойя (*διάνοια*), способность дискурсивного рассуждения, которую, я полагаю, можно отождествить с позднейшим понятием рассудка. Математикой заведует именно дианойя. Связано это с тем, что объекты математики находятся в среднем положении по важнейшему для неоплатоников критерию «единое-многое»: треугольник одновременно и един, и представляет собой одну из многих фигур⁵. В дальнейшем философы Нового времени уделяли, как кажется, недостаточно внимания дискурсивной природе математики (за исключением Лейбница), что отчасти вызвало реакцию XX века. Однако и для Прокла, несмотря на серединный характер математики, созерцание играет в ней важнейшую роль⁶.

В Средние века в латинской схоластике появляется то самое слово *intuitio*. Оно имеет явное значение зрения, причем внимательного и пристального. Однако относительно вопроса, куда смотреть, — ясности нет. В контекстах споров номиналистов с реалистами рассматривался вопрос о созерцании божественного мира, но победила, скорее всего, точка зрения номиналистов, в которую интуиция не вписывается. В то же время существовали и мистики, но их учения оказались с наступлением Нового времени совсем не востребованы.

Новое время в нашем случае начинается с Декарта, не только великого философа, но и великого математика. У него появляется идея интуиции как «ясного и отчетливого усмотрения ума»⁷. Именно к математическим идеям он и относит прежде всего это

4. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: АСТ, 2020. С. 314.
5. Прокл Диадокх. Комментарий к Первой книге «Начал» Евклида / Пер. Ю. А. Шичалина. М.: Греко-латинский кабинет, 1994. С. 47.
6. Там же. С. 79.
7. Декарт Р. Правила для руководства ума // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1989. Т. 1. С. 84.

понятие. Как и у Платона, интеллектуальная интуиция у Декарта разводится с наглядным зрением: тысячеугольник, говорит Декарт, мы не можем вообразить себе наглядно, слишком много углов, но для умозрения тут нет ничего трудного, тысячеугольник не контринтуитивен⁸. Снова встает тот же самый вопрос: куда мы смотрим, осуществляя акт интуиции? От Декарта пошло учение о врожденных идеях, поэтому скорее всего можно предположить, что смотрим мы на идеи, запечатленные в нашем уме (а происхождение их божественное).

Надо упомянуть вместе Декартом и Лейбница: он о созерцании специально не говорил, но зато оставил однозначное учение о происхождении математических истин: они точно запечатлены в нашем разуме⁹. Они являются аналитическими и принадлежат к «истинам разума» в противопоставлении «истинам факта». Более того, в «Монадологии» Лейбниц и истины факта разворачивает изнутри монад, которые «не имеют окон». Для этого, правда, ему понадобилось учение о предустановленной гармонии, которое невозможно сохранить для использования в современной философии.

Очень интересно появление интуиции в философии Джона Локка. Локк — эмпирик, и по логике вещей, по всей логике его системы, интуиции у него не должно быть вообще! Но неожиданно в четвертой книге «Опыта о человеческом разумении» интуиция у Локка появляется, причем во многом именно в связи с математикой (но не только)¹⁰. Интуицию он даже считает наиболее достоверным познанием. Видимо, в каком-то смысле он все же находился под влиянием Декарта.

Самая разработанная идея созерцания содержится в философии Канта. Кстати, заметим, что в том месте, где на русский язык *Anschauung* переводят «созерцание», в английском переводе стоит именно *intuition*. И это прежде всего относится к математике. Здесь не возникает вопроса, куда мы смотрим, ответ однозначный: мы смотрим в себя, созерцаем собственную познавательную способность чувственности, априорные формы которой — пространство и время. Правда, пространство кажется нам находящимся снаружи, это, как говорит Кант, форма внешнего чувства.

8. *Он же*. Размышления о первой философии... // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1994.

Т. 2. С. 58.

9. *Лейбниц Г.-В.* Новые опыты о человеческом разумении // Соч.: В 4 т. М.:

Мысль, 1983. Т. 2. С. 50, 400

10. *Локк Дж.* Соч.: В 3 т. М.: Мысль, 1985. Т. 2. С. 7.

Здесь хорошо подошло бы позднейшее слово «проекция»: мы проецируем пространство вовне себя, хотя оно наше, это мы сами так устроены. Отсюда берется и математика, которую Кант, споря с Лейбницем, считает совокупностью априорных синтетических суждений (Лейбниц считал — аналитических)¹¹. Именно с ее априорностью связана ее необходимость и всеобщность. Из опыта ничего необходимого извлечь нельзя в принципе. Априорные же формы у всех людей одни и те же, отсюда всеобщность. Пространство мы именно созерцаем. Кант говорит еще о «чистом созерцании», когда мы нацелены, собственно, на пространство, без всякого воображения¹². Арифметику Кант связывает тоже с созерцанием, но созерцанием времени. Это мне кажется не очень убедительным, арифметика и геометрия разводились в античной науке, но со времени Декарта они оказались плотно связаны, поэтому арифметика, если я не ошибаюсь, у большинства считающих людей связана с образом числовой прямой. Впрочем, это не главное. Нам важно только то, что по Канту математика встроена в наш ум, и доступ к ней мы получаем посредством созерцания (самих себя).

Другая важная фигура — Эдмунд Гуссерль¹³. Его главный метод «эпохэ»: воздержание от суждений относительно вещей в мире (в чем он следует Декарту и Канту, подробнее в следующем пункте). Поэтому ясно, что о платоновском мире идей Гуссерль говорить не будет, как и об устройстве мозга, о чем в его время уже было модно говорить. Это все внешние вещи, не подвластные философскому анализу. Философский анализ, по Гуссерлю, касается только работы сознания, которая нам дана непосредственно. И это именно, как сказал бы Кант, априорные структуры: те, которые не могут быть другими. Все, что может быть другим — вотчина эмпирической науки. Философия же — «Философия как строгая наука»¹⁴ — занимается неизменным и необходимым.

11. Кант И. Критика чистого разума // Соч.: В 6 т. М.: Мысль, 1964. Т. 3. С. 86, 115.

12. Там же. С. 128.

13. Tieszen R. L. *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge* (Synthese Library, vol. 203). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

14. Гуссерль Э. Философия как строгая наука // Он же. Логические исследования. Картезианские размышления. Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология. Кризис европейского человечества и философии. Философия как строгая наука. Минск; М.: Харвест; АСТ, 2000. С. 668–743.

Понятие созерцания (у него встречаются термины *Anschauung* и *Wesensschau*) Гуссерль вводит не только в отношении математики, но и в отношении логики¹⁵. В частности, он пишет о нем во втором томе «Логических исследований». Он увязывает его с важнейшими для феноменологии вещами: пониманием и смыслом. Когда мы о чем-то думаем, мы это понимаем. Хуже или лучше, правильно или неправильно — это другой вопрос, это может быть по-разному. Но каждый, думая, как-то понимает. Он создает для себя смысл, конституирует смысл, говорит Гуссерль. Формально можно что-то писать, что-то говорить, но по-настоящему думать формально нельзя, в мысли должен быть смысл, иначе мысль не состоялась. И вот чтобы думать о логике и математике, должен быть логический и математический смысл. А это, говорит Гуссерль, именно созерцание («воспроизводимое созерцание»). Он вводит понятие «осуществление значения» (имеется в виду смысл)¹⁶: когда смысл понят по-настоящему, когда он стал как бы неким внутренним содержанием мысли. Другими словами, без созерцания невозможно глубокое понимание.

Гуссерль знал, о чем писал. Он по образованию математик, и в его время математика стала уходить от созерцания, от понятности, от интуитивной ясности, — этот процесс начался в середине XIX века. Он очень хорошо описан в книге Джереми Грея «Призрак Платона: модернистская трансформация математики»¹⁷. Научным руководителем Гуссерля был Карл Вейерштрасс, автор знаменитого примера контринтуитивной «всюду изломанной» функции (всюду изломана она за счет того, что фрактальна; фракталы сами по себе также во многом представляют вызов для созерцания).

В произведении «Начало геометрии» Гуссерль напрямую о созерцании не пишет, но его идея та же: математика становится непонятной, она больше не дает пищу для ума и сердца, не способствует познанию мира. Раньше происходила «реактивация смысла», люди читали авторов и понимали их. Понять можно только смысл, а не письмена, не формулы:

15. *Berghofer P.* Intuitionism in the Philosophy of Mathematics: Introducing a Phenomenological Account // *Philosophia Mathematica*. 2020. Vol. 28. № 2. P. 204–235.

16. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Т. II. Ч. 1: Исследования по феноменологии и теории познания. М.: Академический проект, 2011. С. 41–43.

17. *Грей Дж.* Призрак Платона: модернистская трансформация математики. М.: Канон+, 2021.

В своем прогрессе дедукция следует формально-логической очевидности; но без действительно сформированной способности к реактивации изначальных активностей, заключенных в базисных понятиях, а значит, также и без Что и Как их донаучного материала, геометрия была бы лишеной смысла традицией, о которой бы мы, если бы у нас не было такой способности, никогда не смогли бы узнать, обладает ли или обладала ли она когда-нибудь подлинным, истинно разрешимым смыслом. К сожалению, именно такова наша ситуация, да и ситуация всего Нового времени¹⁸.

То, что происходит в его время, Гуссерль называет «искушение языком».

Говоря о понимании, Гуссерль употребляет слово «переживание», *Erlebnis*. У Гуссерля есть собственно «логические переживания», противопоставляемые формальному выводу. Только это он считает ценным в науке. Только смысл можно себе присвоить. Формальные выкладки, которые — как сказали бы мы сейчас — можно алгоритмически запрограммировать, не являются подлинным человеческим познанием.

Упомянем А. Пуанкаре, его статью «Интуиция и логика в математике»¹⁹. Здесь основная проблема в том, что под словом «интуиция» он понимает уже не то, что Декарт и Кант, а то, что стали понимать в современности — нерациональную догадку. Впрочем, и у него интуиция связана с более глубоким пониманием, чем логический вывод.

Надо сказать несколько слов об интуиционизме Лейтзена Брауэра и Арнда Гейтинга, поскольку может показаться, что они основывались на той же интуиции/созерцании, что и Кант, Гуссерль и Пуанкаре. Но я не думаю, что тут можно говорить об одном и том же. «Интуиция» Брауэра, как представляется, это прежде всего вид деятельности во времени, конструирование. Отсюда борьба с законом исключенного третьего, актуальной бесконечностью, теоремами чистого существования. Математика — не царство вечных истин, которые нам предстоит узнать и понять, а стихия нашего собственного конструирования и творчества. Это сближает интуиционизм не с классической математикой, а с более поздними теориями конструктивизма в эпистемологии. Одна-

18. Гуссерль Э. Начало геометрии. Введение Жака Деррида / Пер. с фр. М. А. Маяцкого. М.: Ad Marginem, 1996. С. 228.

19. Пуанкаре А. Интуиция и логика в математике // Он же. О науке / Под ред. Л. С. Понтрягина. М.: Наука, 1989.

ко нельзя не отметить важную идею о глубинной связи интуиции и времени в сознании. В другом виде мы находим ее, например, у Анри Бергсона. Но анализ этой проблемы уведет нас за пределы данной статьи.

Не совсем ясна, как кажется, по вопросу интуиции/созерцания позиция Давида Гильберта. С одной стороны, он формалист. Математическая теория для него — это абсолютно строгая формальная система. Стала крылатой его фраза о том, что точки, прямые и плоскости должно быть можно заменить на «столы, стулья и пивные кружки»²⁰, — теория все равно будет работать на автомате. В ней явно отрицается роль созерцания в пользу чисто формальных рассуждений. С другой стороны, он в чем-то, как он сам говорит, согласен с Кантом. Он не возражает против наличия априорных синтетических положений в математике²¹. Однако у Канта они были невозможны без созерцания. Мне кажется, деятельность Гильберта как формалиста входит в объективное противоречие с его философскими склонностями к Канту. Однако есть другое мнение²².

Далее в истории философии математики о созерцании практически не говорили. У Жана Дьёдонне есть статья об интуиции, но в ней интуиция понимается не как созерцание. Последним, насколько я могу судить, был Гёдель, склонявшийся к платонизму. Для него интуиция была источником математической достоверности²³. В его время это было уже немодно, и многие философы математики посчитали взгляды Гёделя устаревшими. В наше время, как я уже упоминала выше, различные теории математического познания обсуждаются, в том числе фигурирует и платонизм, но теория созерцания кажется полностью вышедшей из моды.

Итак, что же мы можем вынести из этого краткого исторического обзора теорий созерцания? Созерцание — это наше внутреннее достояние, это переживание, это акт, в котором кон-

20. *Grattan-Guinness I. The Search for Mathematical Roots, 1870–1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics From Cantor Through Russell to Gödel.* Princeton: Princeton University Press, 2000. P. 208.

21. *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. 1990. № 1 (15). С. 116–127.

22. *Смирнова Е. Д.* Метод идеальных элементов и обоснование аподиктического знания // Гуманитарная наука в России. М.: 1996. С. 120–136.

23. *Parsons C.* Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought // *Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 2014.

ституируется смысл, то есть акт понимания. Созерцаем мы или внешний «платоновский» мир математических идей, или собственное познавательное устройство. Математические объекты будут в том и в другом случае идеальны, будут интенциональными предметами мысли. Их познание возможно. Это главные пункты рассмотренных учений: идеальность математических объектов и доступ к ним, возможность их познания. Как мы увидим в конце, это основные пункты, по которым возникает несогласие.

История сомнения

Карл Ясперс во «Введении в философию» пишет, что сомнение является одним из трех истоков философствования, наряду с удивлением и пограничной ситуацией²⁴. Сомнение в философии появляется почти сразу с ее началом. Парменид говорит о доксе (*δόξα*) и алетей (*Ἀλήθεια*), или, как позже стали противопоставлять, эпистеме (*ἐπιστήμη*). Докса это сомнительное мнение о становящемся мире вещей, в отличие от подлинного знания о мире вечных истин²⁵. Таким образом, на первом этапе развития сомнения философу очевидно, что некое подлинное знание существует. Сомнение противопоставляется подлинному знанию. Однако, как мы увидим, сомнение по своему существу хочет разрастаться до бесконечности. История сомнения — это история того, как оно боролось с идеей несомненного знания, а, следовательно, и с созерцанием.

Платон, выводя образ Сократа, показывает его иронию (*εἰρωνεία*). В основе иронии лежит именно сомнение, в нем сила диалектики Сократа. Возьмем, например, диалог «Лахет». В начале сюжета герои спорят о том, подходит ли бой в тяжелом вооружении для обучения мальчиков мужеству. Вступает Сократ, и тема меняется: а что такое мужество? Собеседникам это качество представлялось самопонятным, но выясняется, что идеи на этот счет могут быть разные. Здесь сомнение ведет к прояснению понятий, к строгости мысли²⁶.

24. Ясперс К. Введение в философию. Минск: Пропилеи, 2000.

25. Парменид. О природе. Ст. 29 // Лебедев А. В. Фрагменты ранних греческих философов. М.: 1989. Ч. 1. С. 286.

26. Платон. Диалоги: Феаг, Первый Алкивиад, Второй Алкивиад, Ион, Лахес, Хармид, Лизис. М.: Академический проект, 2011. С. 198–227.

Однако же, как и у Парменида, мир Платона включает в себя несомненное знание, доступное через созерцание. Идеи мы познаем умозрением, *θεωρία*. На нее сомнение Платона не распространяется. Математика ближе к дианоэе, рассуждению, но и она для Платона относится к области несомненного.

Мастера сомнения — греческие скептики, например, Пиррон и Секст Эмпирик. Секст приводит целый ряд положений, основанных на сомнении в способности суждения и доказательства²⁷. Именно скептикам принадлежит термин «эпохэ» (*ἐποχή*), которым позже будет пользоваться Гуссерль. Они же провели явным образом различия между явлениями и мыслимым, что затем развил Кант. Сомнения скептиков касались и авторитетов, и показаний органов чувств, и возможности рационального рассуждения. Позитивной программы скептики практически не предлагали.

Всем известно сомнение Декарта²⁸. Сомневается он, во-первых, в авторитетах, хотя об этом говорит вскользь, как о само собой разумеющемся. Во-вторых, в показаниях органов чувств. Это тоже не новость, античные философы знали, что органы чувств ненадежны. В-третьих, нечто новое: даже и сама математика. Декарт вводит тут фигуру «злого гения», божка, который может навести гипноз на человека и заставить его поверить в привычную человеческую математику, а при этом истинная математика может быть другой. Так что даже математика ненадежна. Все знают, что наконец Декарт находит только одно абсолютно точно истинное суждение: я мыслю, следовательно, я существую. В этом, надо сказать, даже современное глобальное сомнение пока Декарта не одолело, хотя пути намечаются: психиатрия исследует феномены расщепления личности, утраты Я при шизофрении и некоторые подобные вещи.

Далее Декарт с несомненностью находит у себя идею Бога, в чем с ним согласны далеко не все. На Боге у него строится и пошаговое освобождение от сомнения. От Декарта же идет и теория врожденных идей, запечатанных в наш разум Богом. Математика относится именно к таким идеям.

Лейбниц был слишком оптимистичен, чтобы намеренно впадать в сомнение, но у него есть идея ограниченности познания:

27. Секст Эмпирик. Соч.: В 2 т. / Под ред. А. Ф. Лосева. М.: Мысль, 1976. Т. 2. С. 206–380.

28. Декарт Р. Первоначала философии // Соч. Т. 1. С. 297–422.

монады не имеют окон. Знание монады целиком разворачивается изнутри нее. Адекватность этого знания обеспечивается опять же Богом, установившим предустановленную гармонию. Без Бога у рационалистов их системы не держатся. Сомнение в Боге, если его допустить, разрушит сразу все.

Великий сомневающийся XVIII века — Дэвид Юм²⁹. Основная мишень его критики — идея причинно-следственной связи, которую он объявляет всего лишь привычкой, поскольку нам не явлены внешние связи вещей мира. Как вещи между собой взаимодействуют, мы знать не можем, мы только видим эти вещи в серии последовательных состояний. Сами мы полагаем и причинность, и в целом любую связь.

Юм последовательно применяет свое сомнение и к математике. Арифметика у него также носит чисто вероятностный характер. Он эмпирик, следовательно, всякое знание у него происходит из опыта. Из опыта нельзя вывести ничего необходимого. Юм делает вывод: значит, ничего необходимого и нет. Правда, в другом месте он пишет, что математика все же является примером достоверного знания³⁰.

Кант в некотором смысле еще больший скептик, чем Юм. По Юму мы, по крайней мере, в момент восприятия адекватно видим вещи мира. Кант оперирует скептическими понятиями вещи в себе и явления. Каковы вещи в себе, мы не можем знать даже на вид. Мы не знаем даже, есть ли в мире пространство и время. А если есть пространство, то, допустим, трехмерно ли оно? В современной физике есть на этот счет разные теории. Но по Канту мы обречены видеть пространство и видеть его трехмерным — такова наша априорная форма чувственности.

Математика у Канта, как уже говорилось в предыдущем пункте, относится к сфере нашего априорного устройства и таким образом выпадает из-под влияния сомнения. Это, естественно, чисто человеческая математика. Какова «на самом деле» сумма углов треугольника, мы знать не можем (как и вообще, есть ли в мире вещей в себе треугольники). Но в нашем пространстве она такова и всегда такой будет.

Относительно человеческой математики Кант, пожалуй, не то, чтобы ошибся, а скорее ему не хватило воображения. Современная математика очень стремится стать нечеловеческой. Преодо-

29. Юм Д. Трактат о человеческой природе // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1996. Т. 1. С. 53–655.

30. Там же. С. 128.

леть границы представимого, интуитивно очевидного. Из человеческого в ней пока остается логика — ее обычно не ставят под вопрос. В то время как логику, разумеется, тоже надо рассматривать как порождение человеческого ума. Но, возможно, скептическое опровержение логики еще впереди. Может быть, можно считать, что первые шаги в этом направлении — это появление паранепротиворечивой логики.

Гуссерль в смысле сомнения следует Декарту и Канту, хотя свой известный термин «эпохэ» заимствовал у скептиков. У них оно означало «воздержание от суждений». Гуссерль также вводит недопустимость для философии высказываться о вещах мира, как и об «истинах факта» по Лейбницу, и «вещах в себе» по Канту. Однако остается сфера сознания, которое нам дано непосредственно. Высказывания о нем могут быть строгими, необходимыми и всеобщими.

Среди таких исследований сознания у Гуссерля важную роль играет исследование его синтетической деятельности. Она напрямую связана с основной характеристикой сознания — интенциональностью. Интенциональность это направленность на что-либо, а быть направленным на предмет означает думать о нем, понимать его, совершать синтезы, тем самым конституируя смысл. В понятии смысла у Гуссерля увязывается и созерцание, и дискурсивная деятельность (дискурсивная в значении «пошаговая», но не обязательно в словах). Собственно конституирование смысла и есть понимание, и оно происходит не после восприятия, как было бы в наивной эмпирической психологии, а строго одновременно с ним³¹. Из этого следуют, в частности, важные выводы для эмпирической психологии. Было показано, что наше восприятие далеко не нейтрально.

Дальнейшее распространение сомнения в философии хорошо известно, фактически вторая половина XIX века и весь XX век были веками сомнения. Сюда относится и эра подозрения в фигурах Карла Маркса, Фридриха Ницше и Зигмунда Фрейда, и постпозитивизм в науке, и материализм в философии сознания, и многое другое. В философии сознания хочу назвать Дэниела Деннета. Он мастерски использует сомнение — сомневается в единстве Я и даже в наличии квалиа. Безусловно, прямая наследница скептического сомнения в постмодерне — деконструкция Жака Деррида.

31. Гуссерль Э. Картезианские медитации. М.: Академический проект, 2010. С. 59.

Говоря о философии математики этого времени, прежде всего надо учесть, что сама математика стала другой³². Она резко ушла от интуитивной очевидности. Появились неевклидовы геометрии, многомерные искривленные пространства, в теории множеств (которая на первый, наивный взгляд кажется очень понятной) появились такие вещи, как алеф в степени алеф и так далее. Гильберт — важная фигура в разработке и осмыслении сомнения. Математика должна стать чисто формальной, считал он, и тогда сомневаться в ней будет невозможно (опять возникает вопрос, почему под сомнение не попадает логика).

Витгенштейн также сомневается, хотя больше в целесообразности оснований математики, чем в самой математике. Прежде всего, он не считает, что за математикой стоит платоническая реальность. Математика, говорит он, — антропологический феномен³³. Этим он открывает дорогу релятивизации математики, идее альтернативных математик.

Ханс Хан в своей статье «Кризис интуиции»³⁴ подводит итог окончательного изгнания интуиции из математики.

Фикционалисты конца XX — начала XXI века следуют Витгенштейну, даже если на него не ссылаются. Понимание математики как, по сути, языковой игры, как одного дискурса из целого набора возможных других дискурсов — это торжество сомнения.

Победа сомнения

Сомнение победило, и учения об интуиции и созерцании в математике ушли из современного дискурса философии математики³⁵. Является ли победа сомнения над созерцанием победой сомнения в достоверности математического знания вообще? Это вопрос открытый, потому что не ясно, на чем еще основывается достоверность. Почти во всей истории философии математики

32. Грей Дж. Указ. соч.

33. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Филос. раб. Ч. II. М.: Гнозис, 1994. С. 190.

34. Хан Г. Кризис интуиции в математике // Математики о математике. М.: Знание, 1972.

35. Фактически об этом пишет и Джеймс Браун, хотя он допускает, что образы в математике могут способствовать нахождению истины: Brown J. R. *Philosophy of Mathematics — A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*. 2nd ed. N.Y.: Routledge, 2008.

ки (даже у Юма) достоверность апеллировала именно к созерцанию (интуиции). Можно было бы сказать, что сейчас на место созерцания встала формальная логика, как, думаю, это сказали бы Гильберт или Вейерштрасс. Но в чем убедительность логики? Как мы приходим к заключению, что *modus ponens* истинен? Или что правило подстановки не нарушает истинность вывода? Это же тоже созерцание, только логическое, как это было у Гуссерля³⁶. Без того или другого вида внутренней убежденности мы не можем оперировать ни интуитивно, ни логически.

Как пишет Грей, сама математика стала другой — модернистской, как он это называет. Интуиция интенсивно изгоняется из математики, она перестает быть аргументом за и отчасти даже становится аргументом против. Аналогичные процессы, только медленнее, происходят в логике. Если раньше логика двигалась к выводам от неких очевидных, простых, ясных аксиом — мы видим это в классической логике у Аристотеля, видим и у Декарта — то сейчас запрос к логике, да и к математике — делать выводы из любых, сколь угодно контринтуитивных положений. Математика, как говорили еще неопозитивисты, служит переходом от одних положений к другим³⁷, и этот переход чисто формальный, синтаксический.

Не все математики и тем более не все философы это принимают безболезненно. Гуссерль сожалел об излишнем формализме в математике в «Начале геометрии». Вторя ему, Герман Вейль писал:

В наши дни Давид Гильберт довел аксиоматический метод до горького конца, когда суждения математики, включая аксиомы, превратились в формулы и игра в дедукцию свелась к выводу из аксиом тех или иных формул по правилам, не учитывающим смысла формул³⁸.

Вернер Гейзенберг говорил о важности глубокого, смыслового понимания в физике на примере теории относительности³⁹. Но мало кто потом уже отваживался говорить о платоническом мире идей, как и о созерцаниях априорных структур в наших собственных

36. Гуссерль Э. Логические исследования. Т. II. Ч. 1. С. 11.

37. Карнап Р. Преодоление метафизики логическим анализом языка // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1993. № 6. С. 11–26.

38. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989. С. 23.

39. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989. С. 161.

познавательных способностях. Среди примечательных исключений — математик и физик Пенроуз, который, впрочем, склоняется не столько к платонизму, сколько к современной версии пифагореизма.

Аналитическая философия математики рассматривает и платонизм, и априоризм (уже не говоря о теории врожденных идей Декарта и Лейбница) как имеющие только исторический интерес. Однако философы постоянно замечают, что работающие математики — стихийные платоники. Поэтому опровержение платонизма остается на повестке дня. Основной аргумент такой: даже если мир идей, среди которых пребывают математические сущности, реально существует, у нас нет к нему *эпистемического доступа*. Наш мозг — физическое тело, получает физические сигналы от органов чувств, которые, в свою очередь, реагируют на физические объекты. Мир же математических идей бесплотен, пространственно-временных характеристик не имеет, в связи с чем не оказывает воздействия на наш мозг. Все возвращается к спору Платона с Диогеном о столе и чаше.

Но, разумеется, критики правы в том, что гносеологический механизм созерцания остается невыясненным, и это сильно подрывает к нему доверие. В аналитической философии, традиционно склоняющейся к материализму, отсутствие выясненных мозговых механизмов какого-либо акта равносильно утверждению об отсутствии самого акта. Сомнение в нашем случае приобретает форму именно материализма, и этим материализм всегда был привлекателен — в нем есть истинно философский пафос сомнения.

Что же положительного говорит сегодняшнее сомнение относительно природы математики, в чем оно видит ее исток и корень? Рискну обобщить многие голоса и разнообразие идеи. Это конструктивизм, в первую очередь социальный конструктивизм. Его яркий представитель — Блур⁴⁰. Социальный конструктивизм учит, что любое знание вырастает из социальной практики, прежде всего из практик обучения. В стихии других практик — то есть, скорее всего, в другой культуре — была бы другая математика.

К этому же ходу мысли примыкает фикционализм. Он берет на вооружение выше отмеченный аргумент против платониз-

40. См. статью Зинаиды Сокулер «Чистая и прикладная математика в свете „сильной программы“ Дэвида Блура» в настоящем номере «Логоса».

ма: к идеальным объектам у нас нет эпистемического доступа⁴¹. Следовательно, делает заключение представитель фикционализма Филд, самих этих объектов также нет. Это немного напоминает средневековый номинализм: нет универсалий. Тем более, что идеальные объекты в аналитической философии принято называть абстрактными. Филд утверждает, что математические объекты, по сути, выдуманы. Относительно истины фикционалисты считают так: $2 \times 2 = 4$ и $2 \times 2 = 5$ — это равным образом высказывания о несуществующих объектах, поэтому оба эти высказывания ложны. Однако мы явно видим между ними разницу. К первому высказыванию, говорят фикционалисты, мы привыкли. Оно утвердилось в истории математики. Это как сравнить два таких высказывания: «Дед Мороз живет на северном полюсе» и «Дед Мороз живет в пустыне Сахара». Оба по большому счету ложны, потому что Деда Мороза в природе нет. Но нам больше нравится первое, потому что оно лучше укладывается в привычный нарратив о Дед Морозе. То есть математика — это исторически сложившийся нарратив математиков⁴². Другими словами, это социальная практика — то же, что говорит Блур.

Против аргумента от важности социальной практики можно возразить. Вспомним знаменитые слова Канта об опыте: «Всякое познание начинается с опыта. Но не всякое познание зависит от опыта». То есть начало по времени и онтологическая природа — это не одно и то же. Соответственно, сейчас мы можем применить ту же логику Канта к учению социального конструктивизма: «Всякое познание начинается с социальной практики. Но не всякое познание зависит от социальной практики». В частности, остается совершенно не убедительным положение Блура о том, что в другой культуре возможна альтернативная математика не хуже нашей. Никакой хорошей альтернативной математики — в отличие, скажем, от альтернативной музыки — не найдено.

Вопрос о том, в чем природа математической истины, тесно связан с судьбой созерцания. Абсолютна ли эта истина, «встроенна» ли она в саму математику как таковую? Или мы каждый раз

41. *Bueno O.* Nominalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 16.09.2013. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>.

42. *Balaguer M.* Fictionalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 22.04.2008. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/fictionalism-mathematics/>.

полагаем собственные критерии достоверности, возможно, произвольные? Философия математики в последнее время склоняется именно к такому выводу.

Заключение. Перспективы

Какие перспективы у философии математики? Во-первых, как уже говорилось выше, сомнение пока не совсем одолело логику. Трудно представить себе без логики и математику, и философию. Модус поненс пока все еще остается, так сказать, убежищем очевидности. Кроме того, любой философ, и уж особенно аналитические философы, которые сейчас занимаются философией математики, используют классическую логику в своих рассуждениях.

Очень модны сейчас когнитивные исследования математического мышления⁴³. Они не отрицают роли очевидности и наглядности, хотя термины интуиция/созерцание не используются. В рамках когнитивистики, эволюционной эпистемологии или радикального конструктивизма математика будет оказываться конечно, принципиально человеческим продуктом, антропологическим феноменом, как говорил Витгенштейн. Этим направлениям надо будет согласовать свою теорию математики с самой математикой, которая становится все более «нечеловеческой» и непонятной. Здесь прослеживается еще одна тема: приравнять математику к дискурсивной практике. Уже сейчас на этот путь вступили фикционалисты.

Очень важный тренд внутри математики — ее переход на базу искусственного интеллекта⁴⁴. Компьютеры пока еще не очень хорошо доказывают теоремы, но развитие ИИ идет быстро, так что мы наверняка скоро увидим теоремы и доказательства, которых не могли и представить. Сначала это еще будет зависеть от программ, вложенных в компьютер человеком, но и от этого ИИ со временем станет автономен.

Скорее всего, восторжествует точка зрения, что математика — это вид *игры по произвольным правилам*. Эти правила, вероятно, будут называться логическими, однако логика не будет фундаментальна уже ни в чем.

43. Lakoff G., R. E. Núñez. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. N.Y.: Basic Books, 2001.

44. Probst D., Schuster P. Concepts of Proof in Mathematics, Philosophy, and Computer Science. B.: De Gruyter, 2016.

Кроме того, широко распространяется прикладная математика. Алексей Барабашев в своей статье «Математика как инструмент социальных исследований: ростки нового понимания математики и социальной реальности?» в настоящем номере «Логоса» наглядно показывает, что по мере математизации экспериментальных наук требования логической строгости уже не выдвигаются.

И только одно во всем этом остается непонятно. Как математика, будучи игрой — человека, а со временем и компьютера — умудряется быть эффективной в физике? Это знаменитый вопрос Юджина Вигнера⁴⁵. Гильберт говорил даже о предустановленной гармонии между математикой и физикой⁴⁶.

Из всех рассмотренных теорий математики на этот вопрос убедительно отвечает только философия Канта: и математика, и физика разработаны одними и теми же головами с одними и теми же априорными формами, так что они согласованы исходно. Удастся ли построить новый трансцендентализм без идеи созерцания, которая была у Канта необходимой? Или философы математики будут искать ответ где-то еще? Мы увидим это, я думаю, в ближайшем будущем.

Библиография

- Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
- Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Успехи физических наук. 1968. Т. 94. № 3. С. 535–546.
- Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Филос. раб. Ч. II. М.: Гнозис, 1994.
- Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989.
- Гильберт Д. Естествознание и логика // Кантовский сборник. 1990. № 1 (15). С. 116–127.
- Грей Дж. Призрак Платона: модернистская трансформация математики. М.: Канон+, 2021.
- Гуссерль Э. Картезианские медитации. М.: Академический проект, 2010.
- Гуссерль Э. Логические исследования. Т. II. Ч. 1: Исследования по феноменологии и теории познания. М.: Академический проект, 2011.
- Гуссерль Э. Начало геометрии. Введение Жака Деррида / Пер. с фр. М. А. Маяцкого. М.: Ad Marginem, 1996.
- Гуссерль Э. Философия как строгая наука // Он же. Логические исследования. Картезианские размышления. Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология. Кризис европейского человечества и философии. Философия как строгая наука. Минск; М.: Харвест; АСТ, 2000. С. 668–743.

45. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Успехи физических наук. 1968. Т. 94. № 3. С. 535–546.

46. Гильберт Д. Указ. соч. С. 121.

- Декарт Р. Первоначала философии // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1989. Т. 1. С. 297–422.
- Декарт Р. Правила для руководства ума // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1989. Т. 1.
- Декарт Р. Размышления о первой философии... // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1994. Т. 2.
- Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: АСТ, 2020.
- Кант И. Критика чистого разума // Соч.: В 6 т. М.: Мысль, 1964.
- Карнап Р. Преодоление метафизики логическим анализом языка // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1993. № 6. С. 11–26.
- Лейбниц Г.-В. Новые опыты о человеческом разумении // Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1983. Т. 2.
- Локк Дж. Соч.: В 3 т. М.: Мысль, 1985.
- Парменид. О природе // Лебедев А. В. Фрагменты ранних греческих философов. М.: 1989. Ч. 1.
- Платон. Диалоги: Феаг, Первый Алкивиад, Второй Алкивиад, Ион, Лахес, Хармид, Лизис. М.: Академический проект, 2011. С. 198–227.
- Платон. Федр / Под ред. Ю. А. Шичалина. М.: Прогресс, 1989.
- Прокл Диадох. Комментарий к Первой книге «Начал» Евклида / Пер. Ю. А. Шичалина. М.: Греко-латинский кабинет, 1994.
- Пуанкаре А. Интуиция и логика в математике // Он же. О науке / Под ред. Л. С. Понтрягина. М.: Наука, 1989.
- Секст Эмпирик. Соч.: В 2 т. / Под ред. А. Ф. Лосева. М.: Мысль, 1976. Т. 2. С. 206–380.
- Смирнова Е. Д. Метод идеальных элементов и обоснование аподиктического знания // Гуманитарная наука в России. М.: 1996. С. 120–136.
- Хан Г. Кризис интуиции в математике // Математики о математике. М.: Знание, 1972.
- Юм Д. Трактат о человеческой природе // Соч.: В 2 т. М.: Мысль, 1996. Т. 1. С. 53–655.
- Ясперс К. Введение в философию. Минск: ПроPILEI, 2000.
- Balaguer M. Fictionalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 22.04.2008. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/fictionalism-mathematics/>.
- Bedürftig T., Murawski R. Philosophy of Mathematics. B.; Boston: De Gruyter, 2018.
- Berghofer P. Intuitionism in the Philosophy of Mathematics: Introducing a Phenomenological Account // Philosophia Mathematica. 2020. Vol. 28. № 2. P. 204–235.
- Brown J. R. Philosophy of Mathematics — A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures. 2nd ed. N.Y.: Routledge, 2008.
- Bueno O. Nominalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 16.09.2013. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>.
- Grattan-Guinness I. The Search for Mathematical Roots, 1870–1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics From Cantor Through Russell to Gödel. Princeton: Princeton University Press, 2000.
- Lakoff G., R. E. Núñez. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. N.Y.: Basic Books, 2001.

- Parsons C. Mathematical Intuition // Proceedings of the Aristotelian Society. 1980. Vol. 80. № 1. P. 145–168.
- Parsons C. Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought // Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2014.
- Probst D., Schuster P. Concepts of Proof in Mathematics, Philosophy, and Computer Science. B.: De Gruyter, 2016.
- Tieszen R. L. Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge (Synthese Library, vol. 203). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.